



TITLE:

# Stabilization of exotic 4-spaces

AUTHOR(S):

河内, 明夫

---

CITATION:

河内, 明夫. Stabilization of exotic 4-spaces. 数理解析研究所講究録  
1987, 605: 143-149

ISSUE DATE:

1987-02

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/99677>

RIGHT:

## Stabilization of exotic 4-spaces

大阪市大・理 河内明夫 (Akio Kawauchi)

4次元ユークリッド空間  $R^4$  に同相だが, 微分同相ではない4次元なめらかな多様体を 外来4次元空間 (exotic 4-space) といい。現在では, 非可算無限個の外来4次元空間の存在が確認されている (Taubes-Gompf による [G])。他に, すべての外来4次元空間を含んだ外来4次元空間 (普遍外来4次元空間 (universal exotic 4-space) と呼ばれる) の存在 (Freedman-Taylor による [FT]) や,  $R^4$  に含まれる, 従ってすべての外来4次元空間に含まれる, 外来4次元空間の存在 (Edwards [E] による) など知られている。

ここでは, 次の安定化定理を注意する:

(外来空間の) 安定化定理 任意の外来4次元空間に可算無限個の  $S^2 \times S^2$  を connected sum してできた4次元なめらかな多様体は, 必ず,  $R^4$  に可算無限個の  $S^2 \times S^2$  を connected sum してできたものに微分同相になる。

(注意) 次の (1), (2) は同値になるが, そのようなものの存在は知られていない:

(1) 有限個 の  $S^3 \times S^2$  を connected sum して得られたものが,  $R^4$  に同じことをして得られたものに微分同相となるような外來 4 次元空間が存在する,

(2) 外來 4 次元球面 (すなわち, 4 次元玉球面に同相だが微分同相でないなめらか多様体) が存在する.

「可算無限個の  $S^3 \times S^2$  の connected sum」を精密に述べる. そのために,  $W$  を 4 次元の有向連結なめらか

多様体とする.  $\{B_i\}_{i=1}^{\infty}$  を互いに交わらない  $W$  内部の 4 次元球体の族とする. 任意の ( $W$  の中の) コンパクト集合と交わる  $B_i$  が, つねに有限個しかない時, この族  $\{B_i\}_{i=1}^{\infty}$  を 離散的 (discrete) という. 離散的族  $\{B_i\}_{i=1}^{\infty}$  を使って可算無限個の  $S^3 \times S^2$  を connected sum したものを「可算無限個の  $S^3 \times S^2$  を connected sum」してできた 4 次元なめらか多様体といい,  $W \#_{i=1}^{\infty} S^3 \times S^2_i$  とかく. (4 次元なめらか多様体になることは明らかだろ)  $W$  内の任意のコンパクト集合  $C$  に対して,  $C \subset C'$  かつ  $W - C'$  が連結となるようなコンパクト集合  $C'$  が存在する時,

$W$  を connected at  $\infty$  といふ。一般に,  $W \#_{i=1}^{\infty} S^2 \times S^2_i$  は  $\{B_i\}_{i=1}^{\infty}$  の選択によるが, 次の補題が成り立つ:

**補題**  $W$  が connected at  $\infty$  の時,  $W \#_{i=1}^{\infty} S^2 \times S^2_i$  の有向微分同相型は離散的族  $\{B_i\}_{i=1}^{\infty}$  の取りよによらない。

この補題によつて,  $R^4 \#_{i=1}^{\infty} S^2 \times S^2_i$  は  $R^4$  内の離散的族  $\{B_i\}_{i=1}^{\infty}$  の取りよによらずに定まる。これを 安定4次元空間 (stable 4-space) といひ,  $SR^4$  で表わすことにする。 $SR^4$  は4次元トラスと  $S^2 \times S^2$  の connected sum の普遍被覆空間に微分同相になる。connected at  $\infty$  となる  $W$  で, 任意のコンパクト集合  $C$  で  $W-C$  が連結となるものに対し,  $C \subset C'$  かつ  $W-C'$  が連結かつ  $\pi_1(W-C') \rightarrow \pi_1(W-C)$  が自明となるようなコンパクト集合  $C'$  が存在する時,  $W$  を 1-connected at  $\infty$  といふ。

外束4次元空間の安定化定理は次の定理の系として得られる:

**定理A**  $W \#_{\mathbb{R}} S^3 \times S^3$  が安定4次元空間  $SR^4$  に微分同相となるための必要十分条件は,  $W$  が 1-connected, spin, 閉, 1-connected at  $\infty$  であることである. [例えば,  $(K3)_0$  で,  $K3$  曲面から1点を除いたものを表わす時,  $(K3)_0 \#_{\mathbb{R}} S^3 \times S^3 \cong SR^4$  となる.]

**系**  $SR^4$  にめづかに埋め込まれた, 4次元球  $B^4$  と任意の4次元コンパクト部分多様体  $W$  で  $\partial W \cong S^3$  となるものに対し,  $SR^4 - \text{Int} W$  は  $SR^4 - \text{Int} B^4$  に微分同相になる. [van Kampen 定理によって,  $W$  は 1-connected であることを注意せよ.]

安定4次元空間は, その中で 2次元結び目理論を展開しようとして導入したものである. その動機は, 4次元ユークリッド空間  $R^4$  は, その中で 2次元結び目理論を展開するには「狭すぎる」ように筆者には思えたからである. 結び目理論としての内容は他の機会にゆずる (例えば, [K4] にたった11の結果のみ述べてある) として, ここでは, この安定4次元空間  $SR^4$  は「広い空間」であることを指摘するにとどめる. まず定理Aより次がわかる.

**系** 定理Aの条件を満たす  $W$  は, その補空間が  $R_+^4 \#_{\mathbb{R}} S^3 \times S^3$  に微分同相となるように,  $SR^4$  にめづかに埋め込める ( $R_+^4$  は  $R^4$  の上半空間).

特に, 外來4次元空間は  $SR^4$  に なめらかに 埋め込める.

任意の 有向3次元多様体 (非コンパクトでも, 不連結でもよい) は, 定理Aを満たす ある  $W$  に, proper にかもなめらかに 埋め込める. (注: コンパクト集合の原像が コンパクトとなるような写像を proper といい.)  
従って, 次のことが成り立つ:

**定理B** 任意の3次元有向多様体は  $SR^4$  に, proper にかもなめらかに 埋め込める.

$SR^4$  は  $R^5$  に proper にかもなめらかに 埋め込めるので, 次のことが出る:

**系** 任意の 3次元有向多様体は, 自明法バンドルを持つような仕方で,  $R^5$  に proper にかもなめらかに 埋め込める.

この系は、コンパクト3次元多様体の場合にはよく知られている (Hirsch [H]). 定理Bのコンパクト版は次に述べるように成り立たない:

**(非埋め込み定理 [1])** 任意のコンパクト有向連結4次元位相多様体  $W$  に対し、それに埋め込みないコンパクト有向連結3次元多様体が無限に多く存在する.

安定4次元空間  $SR^4$  は、すべての有向3次元多様体を含むような4次元多様体のうちで、最も簡単な空間の一つだろう.

最後に、問題を一つあげておく.

**(問題)** 安定4次元空間  $SR^4$  上の微分構造は2つ以上あるか? または、外来安定4次元空間は存在するか?

## 参考文献

- [E] R.D. Edwards, Some folk theorems about exotic  $R^4$ 's, Abstracts from workshop on Four-manifolds and Geometry, MSRI, Berkeley, California, 1985, 7.
- [G] R.E. Gompf, An infinite set of exotic  $R^4$ 's, J. Diff. Geometry 21 (1985), 283-300.
- [H] M.W. Hirsch, The imbedding of bounding manifolds in Euclidean space, Ann. of Math. 74 (1961), 494-497.
- [K1] A. Kawauchi, Imbedding problem of 3-manifolds into 4-manifolds (preprint).
- [K2] A. Kawauchi, Knots in the stable 4-space: An introduction (to appear).
- [K3] A. Kawauchi, Knots in the stable 4-space, I: The stable 4-space (準備中).
- [K4] 河内, Knots in the stable 4-space, 数理解析講究全集「2次元系及び目を中心とした結び目理論」の中.
- [T] L.R. Taylor, Smoothing 4-manifolds and the universal  $R^4$ , Abstracts from workshop on Four manifolds and Geometry, MSRI, Berkeley, California, 1985, 27.